УДК 519.248:62-192 DOI 10.21685/2307-4205-2019-4-13

В. С. Михайлов, Н. К. Юрков

СОСТАВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

V. S. Mihailov, N. K. Yurkov

A COMPOSITE BAYESIAN ESTIMATE

Аннотация. *Актуальность и цели*. Целью статьи является определение правил для построения составной байесовской оценки. Моделируя различные ситуации окружающего мира, следует помнить о его постоянной изменчивости. Так, различные партии изделий имеют различные величины параметров априорного распределения, а в случае нарушения технологической дисциплины эти различия становятся еще сильнее. Однако заметить эти отличия не позволяет не только зафиксированный выбор вида априорного распределения, но и зафиксированный выбор величин параметров этого распределения, осуществленный на выборках различных партий изделий еще до выпуска контролируемой партии, т.е. этот выбор основан на опыте стабильного выпуска предыдущих партий. Таким образом, байесовская оценка контролируемой партии напрямую (сильно, чутко) зависит не только от вида априорного распределения, исхода испытаний и объема выборки N, но и от выбранных параметров априорного распределения. На практике наиболее часто встречающийся случай – это двухпараметрическое априорное распределение. Поэтому дальнейшее изложение, не нарушая общности рассуждений, проведем для двух параметрических случаев $q(t,\alpha,\beta)$. Проблему неадекватной реакции на изменения, произошедшие в технологическом процессе контролируемой партии изделий, удастся решить, если байесовскую оценку показателя надежности каждой контролируемой партии изделий искать в виде составной оценки, характеризующейся априори установленным распределением (или установленными распределениями), параметры которых заранее определены в зависимости от результатов будущих испытаний изделий этой партии, т.е. параметры α и β должны определять не весь технологический процесс, растянувшийся во времени, а только контролируемую партию изделий в зависимости от результата испытаний. Для описанного примера байесовскую оценку следует представлять в виде $\hat{\theta}_Q(R,N,\alpha_i,\beta_i)$, где $i=0,1,2,\dots,N$ и при $R=r, i=r$; а получаемую плотность составного априорного бета-распределения – в виде $q(t,\alpha_i,\beta_i)$, где α_i,β_i – набор параметров, который вычисляется по результатам испытаний контролируемой партии изделий в соответствии с формулированными правилами. Данная модель позволит по

Abstract. *Background*. The purpose of the article is to determine the rules for constructing a composite Bayesian estimate. Modeling various situations of the world should be aware of its constant variability. Thus, different batches of products have different values of the parameters of the a priori distribution, and in case of violation of technological discipline, these differences become even stronger. However, to notice these differences does not allow not only the fixed choice of the type of a priori distribution, but also the fixed choice of the values of the parameters of this distribution, made on samples of different batches of products before the release of the controlled batch. Those. This choice is based on the experience of a stable release of previous batches. So The Bayesian estimate of the controlled lot directly (strongly, sensitively) depends not only on the type of a priori distribution, the outcome of the tests and the sample size N, but also on the selected parameters of the a priori distribution. In practice, the most common case is the two parametric prior distribution. Therefore, the further presentation, without disturbing the generality of the reasoning, will be carried out for the two parametric case q (*t*, α, β). The problem of inadequate response to changes in the process of the controlled batch of products can be solved if the Bayesian estimate of the reliability index of each controlled batch of products is sought as a composite estimate characterized by a priori established distribution (or established distributions), the parameters of which are predetermined depending on the results future test products of this batch. Those. The parameters α and β should not determine the entire technological process, stretching in time, but only a controlled batch of products depending on the test result. For the example described, the Bayesian estimate should be represented as θ ˆ_Q (R, N, α_i, β_i), where i = 0, 1, 2, ..., N and with R = r, i = r; and the resulting density of the composite a priori beta distribution is in the form of q (t, α_i, β_i), where α_i, β_i is a set of parameters, which is calculated from the results of tests of a controlled batch of products in accordance with the formulated rules. This model will allow to determine the real changes, not the stability of the situation, based on the results of a composite Bayesian assessment. It is clear that the selection of the parameters α_i, β_i depends on the specific test plan and the probability of occurrence of the test outcome P (r, N, p), which is necessary to choose the maximum P_max = P (r, N, p_max) for this test plan and outcome in order to obtain estimates p ˆ = p_max of the parameter p, which simultaneously determines the a результатам составной байесовской оценки определять реальные изменения, а не стабильность ситуации. Ясно, что подбор параметров α_i, β_i зависит от конкретного плана испытаний и вероятности возникновения исхода испытаний $P(r, N, p)$, которую необходимо выбирать максимальной $P_{\max} = P(r, N, p_{\max})$ для данного плана испытаний и исхода с целью получения оценки $\hat{p} = p_{\max}$ параметра p, что одновременно определяет априорную оценку достигнутого уровня надежности контролируемой партии $\hat{p}_\alpha$, т.е. $\hat{p} = \hat{p}_\alpha = \dfrac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}$. Заметим, что априори известная плотность распределения должна получаться не по результатам испытаний различных партий изделий, а по известным зависимостям вероятности возникновения исходов $P(r, N, p)$ для конкретного плана испытаний, что нивелирует ошибки, зависящие от свойств используемой статистической оценки искомых параметров α, β в классическом случае. Заметим еще раз, что параметры α_r, β_r не являются в чистом виде априорными, а являются выбранными вариантами из заранее определенного набора параметров в зависимости от результатов испытаний контрольной партии изделий. Определенная таким образом пара параметров α_r, β_r из уже определенного набора вариантов, определенных по правилу максимальной вероятности возникновения событий (отказов) конкретного плана испытаний, характеризует надежность контролируемой партии изделий. Априорной информацией можно считать само распределение (например бета-распределение параметра p – рандомизированного параметра биномиального распределения). Составная байесовская оценка не зависит от вида (типа) испытуемых изделий, а зависит только от известной (доказанной) зависимости вероятности возникновения исхода испытаний, которая для конкретного плана испытаний, в силу доказанности выбора вероятности по правилам максимизации это вероятности, не изменится. Это и является основным преимуществом составной байесовской оценки – набор вариантов параметров α_r, β_r определяется (вычисляется) заранее для конкретного плана испытаний однократно и до проведения испытаний. Остается только по результатам испытаний на основании установленного набора вариантов параметров α_r, β_r определиться с конкретными величинами этих параметров для контролируемой партии изделий.

Ключевые слова: бета-распределение; биномиальный закон распределения; план испытаний; точечная оценка; байесовская оценка.

priori estimate of the achieved level of reliability of the controlled batch p^_α, i.e. p^ = p^_α = α_r / (α_r + β_r). Note that a priori, the known distribution density should not be obtained from the results of tests of various batches of products, but from the known dependencies of the probability of occurrence of outcomes P (r, N, p) for a specific test plan, which eliminates errors depending on the properties of the used statistical evaluation of the desired parameters α , β in the classic case. Note once again that the parameters α_r, β_r are not pure a priori, but are selected options from a predetermined set of parameters depending on the results of testing a test batch of products. The pair of parameters α_r, β_r determined in such a way, from an already defined set of options determined by the rule of maximum probability of occurrence of events (failures) of a specific test plan, characterizes the reliability of a controlled batch of products. A priori information can be considered the distribution itself (for example, the beta distribution of the parameter p, the randomized parameter of the binomial distribution). The composite Bayes score does not depend on the type (type) of the tested products, but depends only on the known (proven) dependence of the probability of the test outcome, which for a particular test plan, due to the proof of the choice of probability according to the maximization rules, this probability does not change. This is the main advantage of the composite Bayesian estimate – a set of options for the parameters α_r, β_r is determined (calculated) in advance for a specific test plan once and before testing. It remains only to determine the specific values of these parameters for a controlled batch of products based on the results of tests on the basis of an established set of options for the parameters α_r, β_r.

Keywords: beta distribution; binomial distribution law; test plan; point estimation; Bayesian estimation.

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного распределения имеет вид [1]

$$q(x|t) = f_\theta(x)\,q(t)\,/\,f(x), \tag{1}$$

где t – реализация случайного параметра θ с некоторой (априорной) плотностью распределения $q(t), t \in \theta, f_\theta(x) = f(x \mid \theta = t)$ – условная плотность распределения случайной величины (далее – с.в.), $X, f(x) = \int f_\theta(x) q(t) dt$.

Само апостериорное распределение параметра θ будем обозначать через Q_x. Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид

$$\hat{\theta}_Q(X) = E(\theta|x) = \int tq(t \mid X)dt = \int tQ_R(dt). \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что результат байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ ограничен выбранным априорным распределением как неизменным постулатом [2]. Ряд авторов исследуют вопросы выбора априорного распределения, оставаясь в рамках априорного подхода [2]. Однако свойства байесовской оценки остаются ограниченными данным выбором. Примером могут служить сопряженные априорные распределения [2, с. 46]. Рассмотрим пример [2; 3, с. 107]. Пусть процесс Бернулли с параметром $\theta = p$ и выборкой объема N имеет априорное бета-распределение с параметрами α и β. Тогда условная плотность $q(p \mid X)$, где X – случайное число отказов $X = R$, выразится формулой

$$q(p|R) = \frac{\Gamma(R+\alpha+\beta)}{\Gamma(R+\alpha)\Gamma(N-R+\beta)} p^{R+\alpha-1}(1-p)^{N-R+\beta-1}, \tag{3}$$

где Г() – гамма функция.

Из формулы [3] следует, что апостериорное распределение является тоже бета-распределением с параметрами $R+\alpha$ и $N-R+\beta$. Байесовская оценка случайного параметра p равна математическому ожиданию $E(p|R)$, т.е.

$$\hat{\theta}_Q(X) = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}. \tag{4}$$

Заметим, что математическое ожидание априорного распределения, т.е. априорная оценка параметра p до наблюдения равна $\hat{p}_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ [4], а оценка по наблюдению (классическая оценка [5, с. 19]), игнорирующая априорное распределение, равна $p = \frac{R}{N}$ [1]. Байесовская оценка $\hat{\theta}_Q$ дает результаты, не выходящие за рамки дозволенного, которое определено выбором вида распределения и его параметров α и β по результатам испытаний изделий предыдущих партий. Такая модель поведения оценки не отражает реальный мир и обслуживает период стабильной ситуации. В табл. 1 приведены сравнительные результаты байесовской и классической оценок [5, с. 19].

Таблица 1

Сравнительные результаты байесовской и классической оценок

$\hat{\theta}_Q(X) = \frac{r+\alpha}{N+\alpha+\beta}$	$\hat{p} = \frac{r}{N}$	$\hat{p}_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	r	N	α	β
3/9 = 0,333	0,25	2/5 = 0,4	1	4	2	3
5/9 = 0,555	0,75	2/5 = 0,4	3	4	2	3
9/16 = 0,5625	0,25	8/12 = 0,66	1	4	8	4
11/16 = 0,6875	0,75	8/12 = 0,66	3	4	8	4

Из табл. 1 следует, что результаты байесовской оценки при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $\hat{p}_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, в то время как классическая оценка адекватно реагирует на любые внешние изменения. Аналогичные результаты получены в работе [6].

Целью статьи является определение правил для построения составной байесовской оценки.

Моделируя различные ситуации окружающего мира, следует помнить о его постоянной изменчивости. Так, различные партии изделий имеют различные величины параметров априорного распределения, а в случае нарушения технологической дисциплины эти различия становятся еще сильнее.

Однако заметить эти отличия не позволяет не только зафиксированный выбор вида априорного распределения, но и зафиксированный выбор величин параметров этого распределения, осуществленный на выборках различных партий изделий еще до выпуска контролируемой партии, т.е. этот выбор основан на опыте стабильного выпуска предыдущих партий. Таким образом, байесовская оценка контролируемой партии напрямую (сильно, чутко) зависит не только от вида априорного распределения, исхода испытаний и объема выборки N, но и от выбранных параметров априорного распределения.

На практике наиболее часто встречающийся случай – это двухпараметрическое априорное распределение. Поэтому дальнейшее изложение, не нарушая общности рассуждений, проведем для двухпараметрического случая $q(t,\alpha,\beta)$.

Проблему неадекватной реакции на изменения, произошедшие в технологическом процессе контролируемой партии изделий, удастся решить, если байесовскую оценку показателя надежности каждой контролируемой партии изделий искать в виде составной оценки, характеризующейся априори установленным распределением (или установленными распределениями), параметры которых заранее определены в зависимости от результатов будущих испытаний изделий этой партии, т.е. параметры α и β должны определять не весь технологический процесс, растянувшийся во времени, а только контролируемую партию изделий в зависимости от результата испытаний. Для описанного примера байесовскую оценку следует представлять в виде $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_i, \beta_i)$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ и при $R = r, i = r$; а получаемую плотность составного априорного бета-распределения – в виде $q(t, \alpha_i, \beta_i)$, где α_i, β_i – набор параметров, который вычисляется по результатам испытаний контролируемой партии изделий в соответствии с формулированными правилами. Данная модель позволит по результатам составной байесовской оценки определять реальные изменения, а не стабильность ситуации.

Ясно, что подбор параметров α_i,β_i зависит от конкретного плана испытаний и вероятности возникновения исхода испытаний $P(r, N, p)$, которую необходимо выбирать максимальной $P_{\max} = P(r, N, p_{\max})$ для данного плана испытаний и исхода с целью получения оценки $\hat{p} = p_{\max}$ параметра p, что одновременно определяет априорную оценку достигнутого уровня надежности контролируемой партии $\hat{p}_\alpha$, т.е. $\hat{p} = \hat{p}_\alpha = \dfrac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}$. Заметим, что априори известная плотность распределения должна получаться не по результатам испытаний различных партий изделий, а по известным зависимостям вероятности возникновения исходов $P(r, N, p)$ для конкретного плана испытаний, что нивелирует ошибки, зависящие от свойств используемой статистической оценки искомых параметров α, β в классическом случае.

Заметим еще раз, что параметры α_r, β_r не являются в чистом виде априорными, а являются выбранными вариантами из заранее определенного набора параметров в зависимости от результатов испытаний контрольной партии изделий. Определенная таким образом пара параметров α_r, β_r из уже определенного набора вариантов, определенных по правилу максимальной вероятности возникновения событий (отказов) конкретного плана испытаний, характеризует надежность контролируемой партии изделий. Априорной информацией можно считать само распределение (например, бета-распределение параметра p – рандомизированного параметра биномиального распределения).

Составная байесовская оценка не зависит от вида (типа) испытуемых изделий, а зависит только от известной (доказанной) зависимости вероятности возникновения исхода испытаний, которая для конкретного плана испытаний в силу доказанности выбора вероятности по правилам максимизации этой вероятности не изменится. Это и является основным преимуществом составной байесовской оценки – набор вариантов параметров α_r, β_r определяется (вычисляется) заранее для конкретного плана испытаний однократно и до проведения испытаний. Остается только по результатам испытаний на основании установленного набора вариантов параметров α_r, β_r определиться с конкретными величинами этих параметров для контролируемой партии изделий.

Пример 1. Пусть процесс испытаний Бернулли с параметром $\theta = p$ проводится над изделиями с выборкой объема $N = 4$. Для этого плана испытаний задано априорное составное бета-распределение с параметрами α_r и β_r (см. табл. 2). В соответствии с формулами (2) и (3) байесовская оценка примет вид [2; 3, с. 107] (сравните с формулой (4)):

$$\hat{\theta}_Q\left(R = r, N, \alpha_r, \beta_r\right) = \int t q\left(t|X\right) dt =$$
$$= \int_0^1 p \frac{\Gamma\left(r+\alpha_r+\beta_r\right)}{\Gamma\left(r+\alpha_r\right)\Gamma\left(N-r+\beta_r\right)} p^{r+\alpha_r-1}(1-p)^{N-r+\beta_r-1} dp = \frac{r+\alpha_r}{N+\alpha_r+\beta_r},$$

где $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – случайное число отказов, R_i подчиняется закону Бернулли с параметром $p, 0 \le p \le 1$, т.е. R_i – дискретная с.в., принимающая всего лишь два значения 0 и 1 с вероятностями $P\left(R_i = 1 \mid p\right) = p$ и $P\left(R_i = 0 \mid p\right) = 1 - p = q$. $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – статистика, которая подчиняется биномиальному закону распределения $b\left(r, N, p\right) = C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$ с параметрами N и p, C_N^r – число сочетаний r из N элеменов.

Решим классическую задачу определения максимума функции (вероятности события r отказов) $b\left(r, N, p\right) = C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$ относительно переменной p. Для этого прологарифмируем функцию $b\left(r, N, p\right) = C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$, возьмем производную и приравняем ее нулю. Решение полученного уравнения дает известную классическую оценку вероятности отказа для биномиального распределения $\hat{p} = \frac{r}{N}$ [5, с. 19] (несмещенную и эффективную).

Ясно, что классическая оценка $\hat{p} = \frac{r}{N}$ доставляет максимум функции $b\left(r, N, p\right) = C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$ и определяет достигнутый уровень надежности и величину априорной оценки в зависимости от исхода испытаний, т.е.

$$\hat{p} = \frac{r}{N} \cong \hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}.$$

В табл. 2 приведены сравнительные результаты составной байесовской оценки с набором параметров $\alpha_r\left(\hat{p} = \frac{r}{N}\right)$, $\beta_r\left(\hat{p} = \frac{r}{N}\right)$ и классической оценки (эффективной и несмещенной), где вероятность возникновения исхода $b\left(r, N, p\right)$, $r = 0, 1, 2, \ldots, N$, выбиралась максимальной для конкретных плана и исхода испытаний, что определило априорную оценку $\hat{p}_\alpha$ параметра p до наблюдения, т.е.

$$\hat{p} = \frac{r}{N} \cong \hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}.$$

Из табл. 2 следует, что апостериорная оценка (составная байесовская оценка) $\hat{\theta}_Q$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Такая оценка близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{\theta}_Q \cong \hat{p} = \frac{r}{N}$ при условии, что каждая составная часть априорной оценки определена максимальной вероятностью возникновения исхода. Докажем этот факт

$$\hat{\theta}_Q(R=r,N,\alpha_r,\beta_r)=\frac{r+\alpha_r}{N+\alpha_r+\beta_r}=\frac{\dfrac{r}{\alpha_r+\beta_r}+\dfrac{\alpha_r}{\alpha_r+\beta_r}}{1+\dfrac{N}{\alpha_r+\beta_r}}\cong\frac{\dfrac{r}{\alpha_r+\beta_r}+\dfrac{r}{N}}{1+\dfrac{N}{\alpha_r+\beta_r}}=\frac{\dfrac{r*r}{N}+\dfrac{r*\alpha_r}{\text{N}}}{r+\alpha_r}=\frac{r}{N}*\frac{r+\alpha_r}{r+\alpha_r}=\frac{r}{N}.$$

Таблица 2

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q(R,N,\alpha_r,\beta_r)$ с набором параметров $\alpha_r\left(\hat{p}=\dfrac{r}{N}\right)$, $\beta_r\left(\hat{p}=\dfrac{r}{N}\right)$ и классической оценки

$\hat{\theta}_Q=\dfrac{r+\alpha_r}{N+\alpha_r+\beta_r}$	$\hat{p}=\dfrac{r}{N}$	$\hat{p}_\alpha=\dfrac{\alpha_r}{\alpha_r+\beta_r}$	r	N	α_r	β_r	$b()$
1/29 = 0,034	0	1/25 = 0,04	0	4	1	24	0,85
3/12 = 0,25	0,25	2/8 = 0,25	1	4	2	6	0,42
7/14 = 0,5	0,5	5/10 = 0,5	2	4	5	5	0,37
9/12 = 0,75	0,75	6/8 = 0,75	3	4	6	2	0,42
29/30 = 0,96	1	25/26 = 0,96	4	4	25	1	0,84

Еще одним преимуществом составной байесовской оценки является возможность оценивать показатели надежности изделий величиной отличной от нуля и единицы.

Следует заметить, что для крайних значений исходов биномиальных испытаний априорные вероятности возникновения отказа $\hat{p}_\alpha(0)$ и $\hat{p}_\alpha(N)$ следует ограничить значениями отличными от нуля и единицы (см. табл. 2). В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка совпадет с классической. Что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной.

Так как составную байесовскую оценку можно сколь угодно близко приблизить к классической и сделать ее практически несмещенной и эффективной, то нет смысла сравнивать по эффективности составную байесовскую оценку с произвольной байесовской оценкой. Проигрыш по эффективности любой байесовской оценки, построенной для исследуемого плана испытаний – очевиден.

Неоднозначность выбора коэффициентов α_r и β_r можно отрегулировать минимизацией дисперсии бета-распределения [7, п. 2.16].

В силу неоднозначного выбора параметров α_r и β_r можно построить несколько составных байесовских оценок $\hat{\theta}_Q$ примерно равнозначных. Формально, когда сравниваемые оценки являются смещенными и имеют одинаковую минимальную сумму квадрата относительных смещений математического ожидания этих оценок от параметра p [8], то следует дополнительно рассматривать функционал, основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}_Q$ от параметра p для всех возможных значений p,N,r. В этом случае оценку с минимальной суммой математических ожиданий квадратов относительных уклонений от параметра p для всех возможных значений p,N,r следует признать более эффективной [8].

Разумной альтернативой классической оценки, а следовательно, и составной байесовской оценки, в части безотказных биномиальных испытаний может служить составная неявно заданная точечная оценка вероятности отказа изделия $\hat{v}(r,N,\gamma=0{,}86)$, приведенная в [8, 9]. Оценка $\hat{v}(r,N,\gamma=0{,}86)$ находится решением уравнения для различных r и N (γ – вероятность события получить не более r отказов):

$$\sum_{i=0}^{r}C_N^r\hat{v}^r(1-\hat{v})^{N-r}=\gamma=0{,}86.$$

Оценка $\hat{v}$ обладает аналогичными с составной байесовской оценкой $\hat{\theta}_Q$ свойствами, а именно:

– оценка $\hat{v}$ близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{p} = \frac{r}{N} \cong \hat{\theta}_Q$;

– величина оценки $\hat{v}$ для безотказных испытаний отлична от нуля.

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_r, \beta_r)$ с составной неявно заданной оценкой $\hat{v}(r, N, \gamma = 0{,}86)$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_r, \beta_r)$ с составной неявно заданной оценкой $\hat{v}(r, N, \gamma = 0{,}86)$

$\hat{\theta}_Q = \frac{r+\alpha_r}{N+\alpha_r+\beta_r}$	$\hat{p} = \frac{r}{N}$	$\hat{v}(r, N, \gamma = 0{,}86)$	r	N	α_r	β_r
1/29 = 0,034	0	0,037	0	4	1	24
3/12 = 0,25	0,25	0,25	1	4	2	6
7/14 = 0,5	0,5	0,5	2	4	5	5
9/12 = 0,75	0,75	0,75	3	4	6	2
29/30 = 0,96	1	1	4	4	25	1

Аналогичной альтернативой составной байесовской оценки для плана испытаний с ограниченным временем испытаний и восстановлением служат эффективные, на достаточно широком классе оценок, оценки из статей [10, 11].

Заключение

Из изложенного и приведенного примера следует:

– составная байесовская оценка (апостериорная оценка) $\hat{\theta}_Q$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Такая оценка близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{\theta}_Q \cong \hat{p} = \frac{r}{N}$ при условии, что каждая составная часть априорной оценки определена максимальной вероятностью возникновения исхода;

– составная байесовская оценка не зависит от вида (типа) испытуемых изделий, а зависит только от известной (доказанной) зависимости вероятности возникновения исхода испытаний, которая для конкретного плана испытаний в силу доказанности выбора вероятности по правилам максимизации этой вероятности не изменится;

– для крайних значений исходов биномиальных испытаний априорные вероятности возникновения отказа $\hat{p}_\alpha(0)$ и $\hat{p}_\alpha(N)$ следует ограничить значениями отличными от нуля и единицы (см. табл. 2). В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка совпадет с классической. Что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной;

– для биномиальных испытаний разумной альтернативой составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ может служить составная неявно заданная точечная оценка вероятности отказа изделия $\hat{v}(r, N, \gamma = 0{,}86)$.

Библиографический список

1. *Боровков, А. А.* Математическая статистика / А. А. Боровков. – Новосибирск : Наука ; Изд-во Института математики, 1997. – 772 с.
2. *Савчук, В. П.* Байесовские методы статистического оценивания: надежность технических объектов / В. П. Савчук. – Москва : Наука, 1989. – 328 с.
3. *Крупкина, Т. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Ч. 2. Электронный курс лекций / Т. В. Крупкина. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. – 237 с.

4. *Гнеденко, Б. В.* Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – Москва : Наука, 1965. – 524 с.
5. *Воинов, В. Г.* Несмещенные оценки и их применение / В. Г. Воинов, М. С. Никулин. – Москва : Наука, 1989. – 440 с.
6. *Михайлов, В. С.* Исследование оценок на основе интегрального и байесовского подходов / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1 (21). – С. 28–39.
7. *Шуленин, В. П.* Математическая статистика. Ч. 2. Непараметрическая статистика / В. П. Шуленин. – Томск : Изд-во НТЛ, 2012. – 388 с.
8. *Юрков, Н. К.* Оценки показателей надежности для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану / Н. К. Юрков, В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 4 (24). – С. 29–39.
9. *Михайлов, В. С.* Частный случай нахождения эффективных оценок / В. С. Михайлов, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 2 (26). С. 103–113.
10. *Михайлов, В. С.* Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность. – 2016. – № 4. – С. 40–42.
11. *Михайлов, В. С.* Исследование интегральных оценок потока отказов / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 2 (22). – С. 3–10.

References

1. Borovkov A. A. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Novosibirsk: Nauka; Izd-vo Instituta matematiki, 1997, 772 p. [In Russian]
2. Savchuk V. P. *Bayesovskie metody statisticheskogo otsenivaniya: nadezhnost' tekhnicheskikh ob"ektov* [Bayesian methods of statistical estimation: reliability of technical objects]. Moscow: Nauka, 1989, 328 p. [In Russian]
3. Krupkina T. V. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Ch. 2. Elektronnyy kurs lektsiy* [Probability theory and mathematical statistics. Part 2. Electronic course of lectures]. Krasnoyarsk: Sib. feder. un-t, 2011, 237 p. [In Russian]
4. Gnedenko B. V., Belyaev Yu. K., Solov'ev A. D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow: Nauka, 1965, 524 p. [In Russian]
5. Voinov V. G., Nikulin M. S. *Nesmeshchennye otsenki i ikh primenenie* [Unbiased estimates and their application]. Moscow: Nauka, 1989, 440 p. [In Russian]
6. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 1 (21), pp. 28–39. [In Russian]
7. Shulenin V. P. *Matematicheskaya statistika. Ch. 2. Neparametricheskaya statistika* [Mathematical statistics. Part 2. Nonparametric statistics]. Tomsk: Izd-vo NTL, 2012, 388 p. [In Russian]
8. Yurkov N. K., Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 4 (24), pp. 29–39. [In Russian]
9. Mikhaylov V. S., Yurkov N. K. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2019, no. 2 (26), pp. 103–113. [In Russian]
10. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost'* [Reliability]. 2016, no. 4, pp. 40–42. [In Russian]
11. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 2 (22), pp. 3–10. [In Russian]

Михайлов Виктор Сергеевич
ведущий инженер,
Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д. И. Менделеева
(115487, Россия, г. Москва, ул. Нагатинская, 16а)
E-mail: Mvs1956@list.ru

Mikhailov Viktor Sergeevich
lead engineer,
Central Research Institute of Chemistry and Mechanics named after D. I. Mendeleev
(115487, 16a Nagatinskaya street, Moscow, Russia)

Юрков Николай Кондратьевич
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
заведующий кафедрой конструирования и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: yurkov_NK@mail.ru

Yurkov Nikolay Kondratievich
doctor of technical sciences, professor,
the honoured worker of science of the Russian Federation,
head of sub-department of radio equipment design and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Михайлов, В. С. Составная байесовская оценка / В. С. Михайлов, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 4 (28). – С. 118–126. – DOI 10.21685/2307-4205-2019-4-13.