

В. С. Михайлов, Н. К. Юрков

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК

V. S. Mikhaylov, N. K. Yurkov

A SPECIAL CASE OF FINDING EFFECTIVE ESTIMATES

Аннотация. *Актуальность и цели.* За последние несколько лет была проделана большая работа по повышению эффективности оценок показателей надежности для различных планов испытаний, причем особое внимание уделялось испытаниям, не давшим отказы. В этих работах полученные оценки сравнивались по эффективности. Кроме этого, к оценкам для безотказных испытаний предъявлялись определенные требования к результату оценивания показателя надежности: быть монотонными с ростом числа отказов и отличными от нуля и единицы. Казалось, что полученные оценки значительно улучшить не возможно. Однако в некоторых случаях это не так. Целью работы является повышение эффективности оценок вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний в случае испытаний, не давших отказов. *Материалы и методы.* В основе исследования эффективных оценок лежит интегральный подход, базирующийся на построении правила выбора (критерий) эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n; r)$, заданного на сумме значений абсолютных (или относительных) смещений оценок $\hat{\theta}(n; r)$, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания. *Результаты и выводы.* 1. В результате проведенных исследований удалось получить: оценки ВБР $\hat{p}$ и $\hat{v}$ более эффективные в сравнении с ранее предложенными; оценку СНДО $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \tilde{v}(R=0, N, \gamma=0, 6))}$, эффективную на достаточно широком классе оценок и более эффективную в сравнении с ранее предложенными. 2. Полученные оценки $\hat{p}$ и $\hat{v}$, близкие к эффективной, и оценка $\hat{T}_1$, эффективная на достаточно широком классе оценок, предлагаются к использованию для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану. 3. Для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний, оценки ВБР $1 - \tilde{v}$ и $\hat{P}_{NB\tau}(t)$, оценки СНДО $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_{01}$ приблизительно равны между собой для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и следовало ожидать. Выбор, какие

Abstract. *Background.* Over the past few years, a lot of work has been done to improve the effectiveness of evaluations of reliability indicators for various test plans, with particular attention being paid to failing tests. In these papers, the estimates obtained were compared in terms of effectiveness. In addition to the estimates for trouble-free tests, there were certain requirements for the result of evaluating the reliability index: to be monotonous with an increase in the number of failures and different from zero and one. It seemed that the estimates obtained could not be significantly improved. However, in some cases it is not. The aim of the work is to increase the efficiency of estimates of the probability of failure-free operation for a binomial test plan in the case of tests that did not give failures. *Materials and methods.* The study of effective estimates is based on an integral approach based on the construction of a selection rule (criterion) for an effective estimate of $\theta_0(n; r)$ given on the sum of the values of absolute (or relative) displacements of estimates $\theta(n; r)$ selected sets, on the parameter of the distribution law, where n is the number of products initially put up for testing. *Results and conclusions.* 1. As a result of the research, it was possible to obtain: estimates $\hat{p}$ and $\hat{v}$ are more effective than previously proposed ones; assessment $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \tilde{v}(R=0, N, \gamma=0, 6))}$ effective on a fairly wide class of estimates and more effective in comparison with the previously proposed. 2. The obtained estimates of $\hat{p}$ and $\hat{v}$, which are close to the effective one, and the estimate $\hat{T}_1$, effective on a fairly wide class of estimates, are proposed for use for reliable tests carried out according to the binomial plan. 3. For a binomial plan and a test plan with recovery and limited test time, estimates of the probability of failure-free operation $1 - \tilde{v}$ and $\hat{P}_{NB\tau}(t)$, estimates $\hat{T}_1$ and $\hat{T}_{01}$ are approximately equal to each other when failures did not occur during the test, which was to be expected. The choice of what grades to use in this case remains with the tester.

оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

Ключевые слова: схема Бернулли; биномиальный план испытаний; точечная оценка; вероятность отказа; вероятность безотказной работы; эффективная оценка.

Keywords: the Bernoulli scheme; test plan; point estimation; the probability of failure; probability of failure-free operation; effective of assessment.

Введение

За последние несколько лет была проделана большая работа по повышению эффективности оценок показателей надежности для различных планов испытаний, причем особое внимание уделялось испытаниям, не давшим отказы [1–5]. В этих работах полученные оценки сравнивались по эффективности. Кроме этого, к оценкам для безотказных испытаний предъявлялись определенные требования к результату оценивания показателя надежности: быть монотонными с ростом числа отказов и отличными от нуля и единицы для оценок ВБР (далее – ВБР). Казалось, что полученные оценки значительно улучшить невозможно. Однако в некоторых случаях это не так.

Цель работы

Целью работы является повышение эффективности оценок вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний в случае, когда испытания заканчиваются без появления отказов.

Новые понятия

Введем новое понятие, а именно: пусть оценка вероятности отказа p биномиального плана испытаний (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию ($P_{n\Sigma R} = \sum_r P_n(r)$, где $P_n(r)$ – вероятность возникновения $R=r$ отказов) относительно предельных границ изменения ее значений [4–5]. Это означает, что каждый из случайных интервалов $[0; \hat{v}]$ и $[\hat{v}; 1]$, чьи совместные границы равны значениям этой оценки, с вероятностью равной 0,5 накрывают оцениваемый параметр p . Такие оценки будем называть центрируемыми, т.е. центрируемая оценка $\hat{v}$ находится из выражения $P_{n\Sigma R} = \sum_r P_n(r) = 0,5$.

Заметим, что центрируемые оценки для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [4, 5].

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) доверительную границу (далее – НДГ (ВДГ)) случайного интервала для неизвестного параметра p при доверительной вероятности $\gamma = 0,5$ (или уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0,5$). При этом сам доверительный интервал называют центральным [7]. С другой стороны, непосредственно НДГ (ВДГ) случайного интервала для неизвестного параметра p можно трактовать как точечную оценку параметра p с сильным смещением вниз (вверх). НДГ (далее – $\hat{p}_n$) (ВДГ (далее – $\hat{p}_b$)) интервала неизвестного параметра p с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ вычисляют по формулам (случай монотонного убывания) [7, 8]:

$$P_{n\Sigma R} = \sum_r P_n(r, \hat{p}_n) = \gamma;$$

$$P_{n\Sigma R} = \sum_r P_n(r, \hat{p}_b) = \alpha.$$

Для того, чтобы решение этого уравнения существовало и было единственным, необходимо проверять монотонность $P_{n\Sigma R}$ относительно переменной p для различных планов испытаний [6, 7]. В случае монотонного возрастания вероятностной функции $P_{n\Sigma R}$ неизвестные параметры уравнений $\hat{p}_n$ и $\hat{p}_b$ меняются местами в уравнениях [7].

Если полученный интервал ($\hat{p}_в$ и $\hat{p}_н$) свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т.е. $\hat{p}_в$ станет равной $\hat{p}_н$. Что определит точечную оценку $\hat{v} = \hat{p}_в = \hat{p}_н$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\gamma = \alpha = 1 - \gamma = 0,5$, что определяет единственность оценки $\hat{v}$.

В основе изучения центрируемых оценок лежит традиционный метод исследования.

Методы исследования оценок показателей надежности

В основе исследования эффективных оценок лежит интегральный подход, сформулированный в работах [1–5]. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора (критерий) эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n; R)$, заданного на сумме значений абсолютных (или относительных) смещений оценок $\hat{\theta}(n; R)$, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания.

Критерий выбора эффективной оценки для ВБР

Критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(n; R)$ основан на суммарном квадрате абсолютных смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(n; R)$ от вероятности отказа p для всех возможных значений p, n .

Для выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) потребуется только понятие абсолютно эффективной оценки и ограничение на изменение параметра p в пределах $1 \leq p \leq 0$. Поэтому для простоты в качестве критерия получения эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n; R)$ строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(n; R))$) на ограниченном множестве $n_1 \leq n_i \leq n_k, i = 1, \dots, k$ [4–5]:

$$L(\hat{\theta}(n; R)) = \frac{1}{k} \sum_{n_1}^{n_k} \int_0^1 \{E\hat{\theta}(n_i; R) - p\}^2 dp. \quad (1)$$

Оценка $\hat{\theta}_0(n; R)$, минимизирующая функционал $L(\hat{\theta}(n; R))$ на заданном множестве оценок, называется эффективной оценкой по смещению на заданном множестве смещенных оценок. Среди оценок, доставляющих примерно один и тот же минимум функционалу $L(\hat{\theta}(n; R))$, следует выбрать оценку, которая имеет минимальное уклонение в среднеквадратическом смысле (классическое определение эффективной оценки [6]). Данную оценку будем называть как более эффективную в сравнении с выбранными.

Для выбора оценок, обладающих минимальным уклонением, строится функционал (далее – $D(\hat{\theta}(n; R))$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(n; R)$ от параметра p для всех возможных значений p, n [4–5]:

$$D(\hat{\theta}(n; R)) = \frac{1}{k} \sum_{n_1}^{n_k} \int_0^1 E\{\hat{\theta}(n_i; R) - p\}^2 dp. \quad (2)$$

Оценку, которая доставляет нуль функционалу $L(\hat{\theta}_0(n; R)) = 0$ (несмещенная оценка) и минимум функционалу $D(\hat{\theta}_0(n; R))$, будем называть абсолютно эффективной.

Новые подходы к улучшению эффективности оценок (частный случай)

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [5] и что, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L(\hat{v}(n; R)) > 0$. Однако это смещение можно умень-

шить, а значит, и улучшить эффективность. Для этого достаточно минимизировать функционал $L(\tilde{v}(n; R))$, варьируя величиной вероятности $0,5 + x$ в выражении $P_{n \Sigma R} = \sum_r P_n(r, \tilde{v}) = 0,5 + x$, где x – некоторое вещественное число. Полученная таким образом оценка уже не является центрируемой, но имеет меньшее смещение в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}$. А следовательно, от оценки $\tilde{v}$ можно ожидать и большую эффективность.

Наиболее интересными для практики являются биномиальные испытания и испытания с ограниченной продолжительностью и восстановлением отказавших изделий.

Биномиальный план испытаний. Нахождение оценки ВБР близкой к эффективной

Пусть случайная величина R имеет биномиальное распределение $p_n(r)$ [7, ф. 1.4.55] с параметрами n и $p, 0 \leq p \leq 1$, т.е. с.в. R , равная числу успехов в серии из n независимых опытов с вероятностью успеха p , принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями

$$p_n(r) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

Математическое ожидание $E\hat{\theta}(R, n)$ имеет вид

$$E\hat{\theta}(R, n) = \sum_{r=0}^n p_n(r) \hat{\theta}(r, n).$$

Ограничим объем испытаний $0 < n \leq 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (1) примет вид

$$L(\hat{\theta}(n; R)) = \frac{1}{10} \sum_{n_1=1}^{n_0=10} \int_0^1 \{E\hat{\theta}(n_1; R) - p\}^2 dp.$$

А формула (2) примет вид

$$D(\hat{\theta}(n; R)) = \frac{1}{10} \sum_{n_1=1}^{n_0=10} \int_0^1 E\{\hat{\theta}(n_1; R) - p\}^2 dp.$$

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний $P_{n \Sigma R}$ монотонно убывает с ростом p [7], а следовательно, уравнение

$$P_{n \Sigma R=r} = \sum_{k=0}^r P_n(k, \tilde{v}) = 0,5 + x \quad (3)$$

имеет единственное решение. Расчеты показывают, что оценке $\tilde{v}$, минимизирующей функционал $L(\tilde{v}(n; R))$, соответствует вероятность $0,5 + x = 0,86$.

В табл. 1 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n; R))$ и $D(\hat{\theta}(n; R))$ в соответствии с формулами (1) – (3), следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}: \bar{p} = \frac{R}{n}, \hat{v}, \tilde{v}, \hat{p}, \tilde{p}$ [5] и $\hat{p} = \frac{R+1}{n+2}$, где

$$\hat{p} = \begin{cases} \hat{v}(0, n), & R=0, \\ \frac{R}{n}, & R>0, \end{cases} \quad \tilde{p} = \begin{cases} \tilde{v}(0, n), & R=0, \\ \frac{R}{n}, & R>0. \end{cases}$$

Вычисления функционалов $L(\hat{\theta}(n; R))$ и $D(\hat{\theta}(n; R))$ проводились с шагом $\partial p = 1E - 03$. А вычисления неявно заданных оценок $\tilde{v}$ и $\hat{v}$ проводились с точностью $1E - 04$.

Таблица 1

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа
в функционалы $L(\hat{\theta}(n; R))$ и $D(\hat{\theta}(n; R))$

Вид функционала	$\hat{v}$ $\gamma = 0,5$	$\tilde{v}$ $\gamma = 0,86$	$\hat{p}$	$\tilde{p}$	$\bar{p} = \frac{R+1}{n+2}$	$\bar{p} = \frac{R}{n}$
$L(\hat{\theta}(n; R))$	0,0176	0,0058	0,0112	0,0008	0,0104	6E-33
$D(\hat{\theta}(n; R))$	0,0446	0,0490	0,0401	0,0439	0,0266	0,0488

Из табл. 1 следует, что составная оценка $\tilde{p}$, построенная на основе оценки $\tilde{v}$ и классической (несмещенной) оценки $\frac{R}{n}$, обладает минимальным смещением из всех предложенных оценок (за исключением несмещенной и эффективной оценки $\bar{p} = \frac{R}{n}$). Как и следовало ожидать, оценка $\tilde{v}(\gamma = 0,86)$ обладает минимальным смещением в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\gamma = 0,5)$.

Из табл. 1 также следует, что оценки $\hat{p}$ и $\tilde{p}$ примерно равносильны по уклонению своих значений от параметра p и незначительно уступают в этом качестве оценкам $\tilde{v}$ и $\hat{v}$. Поэтому оценку $\tilde{p}$ можно принять в качестве искомой эффективной оценки среди предложенных, не считая оценку $\bar{p} = \frac{R}{n}$.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом и диапазоном суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Несмещенная и эффективная оценка $\bar{p} = \frac{R}{n}$ биномиального плана испытаний обладает минимальной дисперсией (разбросом своих значений) среди несмещенных оценок [6, 7]. Однако всегда можно найти смещенную оценку, обладающую меньшим разбросом своих значений (и это с учетом смещения) в сравнении с несмещенными оценками, что и отражено в табл. 1. Несмещенная и эффективная оценка $\bar{p} = \frac{R}{n}$ незначительно проигрывает по разбросу своих значений среди предложенных оценок (см. табл. 1).

Оценка $\bar{p} = \frac{R+1}{n+2}$ приведена для сравнения (см. табл. 1), так как обладает свойствами, близкими по эффективности к лучшим оценкам ($\tilde{v}(\gamma = 0,86)$ и $\tilde{p}(\gamma = 0,86)$) и даже превосходит некоторые из них ($\hat{v}(\gamma = 0,5)$ и $\hat{p}(\gamma = 0,5)$). Кроме того, оценка $\bar{p}$ обладает наименьшим разбросом своих значений в сравнении с представленными оценками.

Оценка $\bar{p} = \frac{R+1}{n+2}$ является байесовской оценкой и представляет тривиальный случай. Чтобы получить оценку $\bar{p}$, для этого следует предположить, что величина параметра p равномерно распределена в интервале $[0;1]$. Это допущение соответствует полному отсутствию данных о надежности изделия, т.е. максимальной неопределенности относительно интервала значений параметра p .

Плотность равномерного з.р. параметра p на отрезке $p = t \in [t_1, t_2]$ имеет вид

$$q(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}. \quad (4)$$

Суть байесовского подхода состоит в том, что неизвестный (оцениваемый) параметр p рассматривается как случайная величина (далее – с.в.) с некоторой плотностью распределения $q(t)$, где t – реализация с.в. p [6, 9]. Плотность $q(t)$ называется априорной, т.е. данной до эксперимента. Байесовский подход предполагает, что неизвестный параметр p был выбран случайным образом из распределения с плотностью $q(t)$. Тогда совместная плотность распределения выражается формулой $f(R=r, p=t) = f(r|p=t)q(t)$.

В соответствии с формулой Байеса условная плотность апостериорного распределения (после эксперимента) примет вид [6]

$$q(t|R=r) = \frac{f(r|p=t)q(t)}{f(r)}, \quad (5)$$

где $f(r) = \int f(r|p=t)q(t)dt$. Само апостериорное распределение параметра p будем обозначать через Q_R . Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид

$$\hat{\theta}_Q(R) = E(p|R) = \int tq(t|R)dt = \int tQ_R(dt). \quad (6)$$

В силу свойств условного математического ожидания байесовская оценка минимизирует среднеквадратическое отклонение $E(\hat{\theta}_Q(R) - p)^2$. Или для сравнения байесовской оценки на множестве других оценок $\hat{\theta}(R)$ выполняется неравенство

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - p)^2 \leq E(\hat{\theta}(R) - p)^2 = \int E_t(\hat{\theta}(R) - t)^2 q(t)dt. \quad (7)$$

Отметим еще раз, что для байесовской оценки безусловное среднеквадратическое отклонение (см. формулу (7))

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - p)^2 = \int E_t(\hat{\theta}_Q(R) - t)^2 q(t)dt \quad (8)$$

принимает наименьшее возможное значение. Соотношение (8) показывает, что байесовская оценка минимизирует среднее значение. Недостатком байесовского подхода является обязательное знание плотности априорного з.р. случайного параметра p (см. формулы (5)–(8)). С одной стороны, эти, заложенные в правило, предварительные знания несут в себе однократные финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [9], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества.

Плотность совместного распределения случайных величин параметра p и R для биномиальных испытаний выражается формулой ($t_2=1, t_1=0$):

$$f(R=r, p=t) = f(r|p=t)q(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} C_n^r t^r (1-t)^{n-r}.$$

Тогда в соответствии с формулой (5)

$$f(r) = \int f(r|p=t)q(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_0^1 C_n^r t^r (1-t)^{n-r} dt.$$

Условная плотность апостериорного распределения для биномиального плана испытаний примет вид

$$q(t|R=r) = \frac{f(r|p=t)q(t)}{f(r)} = \frac{t^r (1-t)^{n-r}}{\int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} dt}.$$

Учтем, что $\int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} dt = \frac{\Gamma(R+1)\Gamma(N-R+1)}{\Gamma(N+2)}$ [7, ф. (1.4.35)], тогда условная плотность апостериорного распределения для биномиального плана испытаний подобна плотности бета-распределения с параметрами $p=t, a=R+1, b=N-R+1$, а именно [7, ф. (1.4.31)]:

$$q(t|R=r) = f_p(t, R+1, N-R+1) = \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(R+1)\Gamma(N-R+1)} t^R (1-t)^{n-r}.$$

Для бета-распределения с параметрами $a=R+1, b=N-R+1$ математическое ожидание для случайного параметра p выражается через ее параметры a и b по формуле [7, ф. (1.4.37)]:

$$M(p) = \frac{a}{a+b} = \frac{R+1}{N+2}.$$

Заметим, что $M(p)$ является апостериорной оценкой параметра p , т.е. $\bar{p}(R, N) = \frac{R+1}{N+2}$.

В случае байесовского оценивания оценка $\bar{p}(R, N)$ является тривиальной. Однако в случае полного отсутствия данных о надежности изделий оценка $\bar{p}(R, N)$ является хорошим инструментом исследователя. Несмотря на свою простоту, оценка $\bar{p}(R, N)$ является близкой по своей эффективности к лучшим оценкам, предназначенным для безотказных испытаний, проводимых по схеме Бернулли (плану биномиальных испытаний) (см. табл. 1).

Биномиальный план испытаний. Нахождение эффективной оценки средней наработки до отказа

Будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (далее – з.р.) с параметром T_0 , где последний совпадает со средней наработкой до отказа (далее – СНДО). Тогда расчетное значение вероятности безотказной работы (далее – ВБР) одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством

$$P_0(\tau) = e^{\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)}.$$

В качестве критерия получения эффективной оценки СНДО строится функционал (далее – $V(\hat{\theta})$), основанный на суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\hat{\theta}(R, N)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений t, N, τ [4, 5]:

$$V(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \frac{1}{3} \sum_{\tau_j=1E+3}^{\tau_j=1E+5} \frac{1}{10} \sum_{N=10}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \{E\hat{\theta}(R, N, \tau_j) - t\}^2 \partial t.$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) $t \in [0; \infty]$.

И строится функционал (далее – $H(\hat{\theta})$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R, N)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО), для всех возможных значений t, N, τ [4, 5]:

$$H(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \frac{1}{3} \sum_{\tau_j=1E+3}^{\tau_j=1E+5} \frac{1}{10} \sum_{N=10}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 E\{\hat{\theta}(R, N) - t\}^2 \partial t.$$

Задачей функционала $H(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ является определение степени разброса значений предложенных оценок СНДО.

Оценка СНДО, минимизирующая предлагаемые функционалы, является абсолютно эффективной среди предложенных оценок.

В соответствии с построенным критерием оценка СНДО $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \tilde{v}(R, N, \gamma = 0, 6))}$ показала небольшое преимущество перед оценкой $\hat{T}_4 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{v}(R, N, \gamma = 0, 5))}$ [4 – 5], а именно: $V(\hat{T}_1) = 10,59 < V(\hat{T}_4) = 11,01$, $H(\hat{T}_1) = 1035 > H(\hat{T}_4) = 538$.

Именно оценку $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \tilde{v}(R, N, \gamma = 0, 6))}$ следует признать эффективной в сравнении с оценкой $\hat{T}_4 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{v}(R, N, \gamma = 0, 5))}$, несмотря на то, что оценка $\hat{T}_1$ имеет несколько больший разброс.

Пример 1. В процессе испытаний на надежность по биномиальному плану одного изделия в течение назначенного времени отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета ВБР примера 1

$1 - \hat{v}$	$1 - \tilde{v}$	$1 - \hat{p}$	$1 - \tilde{p}$
0,5	0,86	0,5	0,86

Пример 2. В рамках примера 1 в процессе испытаний на надежность 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий. Результаты расчета приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты расчета ВБР примера 2

$1 - \hat{v}$	$1 - \tilde{v}$	$1 - \hat{p}$	$1 - \tilde{p}$
0,933	0,985	0,933	0,985

Рассмотрим эффективную точечную оценку ВБР за время t , равное времени испытаний τ , полученную для плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний [2] в соответствии с критерием эффективности интегральных оценок [2], а именно:

$$\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{(-t/6N\tau)}, \text{ при } R = 0 \text{ и } \hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{(-t^*(R+0,5)/N\tau)}, \text{ при } R > 0.$$

Эта оценка ВБР $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ является эффективной по критерию интегральных оценок [2].

Исходя из логики построения биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний, оценки $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ и $1 - \tilde{v}$ должны быть приблизительно равными для испытаний, не давших отказы. Покажем это.

Пример 3. В рамках примера 1 в процессе испытаний на надежность ряда из 1, ..., 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Результаты расчета приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты расчета ВБР примера 3

N	$1 - \hat{v},$ $\gamma = 0,86$	$\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{\left(\frac{-t}{6N\tau}\right)}, t = \tau$	$\bar{p} = \frac{R+1}{n+2}$	$1 - \hat{v},$ $\gamma = 0,5$
1	0,86	0,846	0,667	0,500
2	0,927	0,920	0,750	0,707
3	0,951	0,946	0,800	0,794
4	0,963	0,959	0,833	0,841
5	0,970	0,967	0,857	0,871
6	0,975	0,973	0,875	0,891
7	0,978	0,976	0,889	0,906
8	0,981	0,979	0,900	0,917
9	0,983	0,982	0,909	0,926
10	0,985	0,983	0,917	0,933

Из примера 3 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний оценки $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ и $1 - \hat{v}$ приблизительно равны для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали и объем испытаний не превышает 10 изделий. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

Рассмотрим эффективную точечную оценку СНДО, полученную для плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний [1, 2] в соответствии с критерием эффективности интегральных оценок [2], а именно:

$$T_{01} = 2N\tau, \text{ при } R = 0 \text{ и } T_{01} = \frac{N\tau}{R+1}, \text{ при } R > 0.$$

Эта оценка СНДО является эффективной по критерию интегральных оценок 1-го типа (эффективной по смещению) на достаточно широком классе оценок [1, 2].

Исходя из логики построения биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний, оценки T_1 и T_{01} должны быть приблизительно равными для испытаний, не давших отказы. Покажем это.

Пример 4. В процессе испытаний на надежность в течение 10 000 ч ряда из 1, ..., 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Результаты расчета приведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты расчета СНДО примера 4

N	$\hat{T}_1 = \frac{\tau = 1000}{-\ln(1 - \hat{v}(R = 0, N, \gamma = 0,6))}$	$T_{01} = 2N\tau, \text{ при } R = 0, \tau = 1000$
1	1958	2000
2	3923	4000
3	5855	6000
4	7823	8000
5	9788	10 000
6	11 748	12 000
7	13 698	14 000
8	15 660	16 000
9	17 611	18 000
10	19 576	20 000

Из примера 4 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний оценки $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_{01}$ приблизительно равны для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали и объем испытаний не превышает 10 изделий, что и следовало ожидать. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

Заключение

1. В результате проведенных исследований удалось получить:
 - оценки ВБР $\hat{p}$ и $\hat{v}$ более эффективные в сравнении с ранее предложенными [4, 5];
 - оценку СНДО $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \tilde{v}(R=0, N, \gamma=0, 6))}$ эффективную на достаточно широком классе оценок и более эффективную в сравнении с ранее предложенными [4, 5].
2. Полученные оценки $\hat{p}$ и $\hat{v}$, близкие к эффективной, и оценка $\hat{T}_1$, эффективная на достаточно широком классе оценок, предлагаются к использованию для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану.
3. Для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний, оценки ВБР $1 - \tilde{v}$ и $\hat{P}_{NBt}(t)$, оценки СНДО $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_{01}$ приблизительно равны между собой для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и следовало ожидать. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

Библиографический список

1. Михайлов, В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность. – 2016. – № 4. – С. 40–42.
2. Михайлов, В. С. Исследование интегральных оценок потока отказов / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 2 (22). – С. 3–10.
3. Михайлов, В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность и контроль качества. – 1988. – № 9. – С. 6–11.
4. Михайлов, В. С. Неявные оценки для плана испытаний типа NBt / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1 (21). – С. 64–71.
5. Юрков, Н. К. Оценки показателей надежности для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану / Н. К. Юрков, В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 4 (18). – С. 29–39.
6. Боровков, А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. – Новосибирск : Наука ; Изд-во Института математики, 1997. – 772 с.
7. Шуленин, В. П. Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика / В. П. Шуленин. – Томск : Изд-во НТЛ, 2012. – 540 с.
8. Вопросы математической теории надежности / В. А. Каштанов, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев, И. Н. Коваленко, Е. Ю. Барзилович, И. А. Ушаков ; под ред. Б. В. Гнеденко. – Москва : Радио и связь, 1983. – 376 с.
9. Савчук, В. П. Байесовские методы статистического оценивания: надежность технических объектов / В. П. Савчук. – Москва : Наука, 1989. – 328 с.

References

1. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost'* [Reliability]. 2016, no. 4, pp. 40–42. [In Russian]
2. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 2 (22), pp. 3–10. [In Russian]
3. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva* [Reliability and quality control]. 1988, no. 9, pp. 6–11. [In Russian]
4. Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 1 (21), pp. 64–71. [In Russian]
5. Yurkov N. K., Mikhaylov V. S. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 4 (18), pp. 29–39. [In Russian]
6. Borovkov A. A. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Novosibirsk: Nauka; Izd-vo Instituta matematiki, 1997, 772 p. [In Russian]
7. Shulenin V. P. *Matematicheskaya statistika. Chast' 1. Parametricheskaya statistika* [Mathematical statistics. Part 1. Parametric statistics]. Tomsk: Izd-vo NTL, 2012, 540 p. [In Russian]

8. Kashtanov V. A., Belyaev Yu. K., Solov'ev A. D., Kovalenko I. N., Barzilovich E. Yu., Ushakov I. A. *Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti* [Problems of mathematical theory of reliability]. Moscow: Radio i svyaz', 1983, 376 p. [In Russian]
9. Savchuk V. P. *Bayesovskie metody statisticheskogo otsenivaniya: nadezhnost' tekhnicheskikh ob"ektov* [Bayesian methods of statistical estimation: reliability of technical objects]. Moscow: Nauka, 1989, 328 p. [In Russian]

Михайлов Виктор Сергеевич

ведущий инженер,
Центральный научно-исследовательский институт
химии и механики им. Д. И. Менделеева
(115487, Россия, г. Москва, ул. Нагатинская, 16а)
E-mail: Mvs1956@list.ru

Юрков Николай Кондратьевич

доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
заведующий кафедрой конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: yurkov_NK@mail.ru

Mikhailov Viktor Sergeevich

lead engineer,
Central Research Institute of Chemistry
and Mechanics named after D. I. Mendeleev
(115487, 16a Nagatinskaya street, Moscow, Russia)

Yurkov Nikolay Kondratievich

doctor of technical sciences, professor,
the honoured worker of science
of the Russian Federation,
head of sub-department of radio equipment design
and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Михайлов, В. С. Частный случай нахождения эффективных оценок / В. С. Михайлов, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 2 (26). – С. 103–113. – DOI 10.21685/2307-4205-2019-2-12.